Funktionale und stochastische Modelle für das Europäische Dreiecksnetz mit ihrer Bezugnahme auf C. F. GAUSS

Wolf, Helmut

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 27, 1977, S.227-236

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Funktionale und stochastische Modelle für das Europäische Dreiecksnetz mit ihrer Bezugnahme auf C. F. GAUSS

Von **Helmut Wolf**

Ziel aller wissenschaftlich-geodätischen Betätigung ist die Lösung des Problems der Erdfigur und der Erddimensionen. Da hierbei die Frage nach metrischen Größenbeziehungen gestellt ist, so ergibt sich, daß man ohne Distanzmessungen irgendwelcher Art nicht das aus geometrischen und physikalischen Relationen sich zusammensetzende Modell aufbauen kann, welches die gesuchte Lösung impliziert.

Wie weittragend diese Frage der metrischen Aussage unseres geodätischen Systems ist, erkennt man daran, daß auch die kosmischen Längeneinheiten und astronomischen Entfernungsangaben, von den Ausmaßen der Erdumlaufbahn bis hin zum Lichtjahr, sich von den Erddimensionen herleiten, so daß mithin der metrischen Skalierung unseres geodätischen Größensystems, als Teilaufgabe des Erdmessungsproblems, eine Bedeutung zukommt, die weit über die speziellen Belange terrestrischer Vermessungen hinausweist.

1. Die Rolle der Triangulation

Seit den Zeiten von TYCHO de BRAHE und SNELLIUS gilt als klassisches Hilfsmittel zur Bestimmung von metrischen Größen im und am Erdkörper die Triangulation; — gleichgültig, ob dabei nach der Bogenlänge von Oberflächenkurven oder nach räumlichen Sehnenlängen gefragt wird.

Nun ist die metrologische Aussage einer Triangulation — die Trilateration mit eingeschlossen — für das Erdmessungsproblem umso inhaltsträchtiger, je umfassender das Triangulationsgebilde in seiner gebietsmäßigen Ausdehnung genommen wird. Letzte Konsequenz hierbei ist die Maßstabsbestimmung nach Satellitenmethoden, insbesondere mittels Lasermessungen, wie aus den Ausführungen von Prof. SIGL ersichtlich ist.

So stehen heutigentages die Schaffung von Triangulationssystemen kontinentalen Ausmaßes im Mittelpunkt des wissenschaftlichen Interesses, wie etwa die Ausgleichung des gesamtamerikanischen Dreiecksnetzes von Kanada bis Mexico, oder — für uns Europäer näherliegend — die des Europäischen Dreiecksnetzes.

2. Das Europäische Dreiecksnetz

Sieht man im folgenden von der Darlegung entwicklungsgeschichtlicher Betrachtungen ab, so muß doch der Name jenes Mannes genannt werden, der zum ersten Male den schöpferischen Gedanken an ein zusammenhängendes Europäisches Dreiecksnetz entwickelte: — Carl Friedrich GAUSS. Seine Ansicht, daß es nicht chimärisch wäre — wie er sich ausdrückte —, alle Sternwarten von Europa trigonometrisch miteinander zu verbinden und den größten Teil von Europa vollständig mit einem Dreiecksnetz zu überziehen, ist dann für die gesamte weitere Entwicklung zum Programm geworden.

Wir überspringen also die zwischenzeitlichen Epochen und nehmen sogleich auf die jüngste Entwicklungsphase Bezug, auf das „Réseau Européen Trigonométrique", kurz „Retrig" genannt, das in seinem offiziellen Charakter als ein internationales Studienobjekt einer Permanenten Unterkommission der Internationalen Assoziation für Geodäsie sich darstellt.

Dazu brauchen wir noch, als Vorstufe, das Europäische Dreiecksnetz von 1950, das nicht nur die Lagerung und Orientierung dem neuen Netz geliefert hat, sondern auch noch alle Näherungskoordinaten, vor allem aber alle Lotabweichungen mitsamt den daraus berechneten Geoidundulationen. Ohne diese Daten von 1950 wäre die Berechnung des heutigen Retrig nicht — jedenfalls nicht in der nachstehend beschriebenen Weise — möglich gewesen.

3. Modelle für die Netzberechnung

Jedes Messungsergebnis nun ist wegen seiner grundsätzlichen Fehlerhaftigkeit als ein nicht reproduzierbares Zufallsereignis zu nehmen. Daher hat das Problem der Berechnung eines Triangulationsnetzes stets einen doppelten Aspekt, nämlich einen wahrscheinlichkeitstheoretischen und zugleich einen physikalisch oder geometrisch determinierten.

Diese beiden Aspekte drücken sich in Relationen aus, die wir im folgenden als das „funktionale" bzw. als das „stochastische Modell" bezeichnen wollen.

4. Das funktionale Modell

Hierzu zählen also alle Aussagen und Vorstellungen geometrischen und physikalischen Inhaltes. Da sie keine Widersprüchlichkeiten in sich bergen dürfen, müssen wir uns hierbei auf die gedachten „wahren Werte" der Messungsgrößen beziehen, wie sie in der Statistik als Erwartungswerte definiert sind.

Wir betrachten nun der Reihe nach die wichtigsten Aspekte des funktionalen Modells, die bei der Berechnung des Europäischen Dreiecksnetzes Verwendung gefunden haben:

a) Die Reduktionsmethode

Entsprechend einem Wort von Felix KLEIN, daß es kein besseres Beispiel für eine Approximationsmathematik gäbe als die Geodäsie, wollen wir sogleich auf einen fundamentalen Approximationsprozeß eingehen, der uns seit den Zeiten von GAUSS geradezu zur Selbstverständlichkeit geworden ist, nämlich der Vorgang der Reduktion auf das Ellipsoid. Die Rechtfertigung dieses Vorganges gründet sich auf die Tatsache, daß alle unsere terrestrischen Höhen klein sind gegenüber dem Erdradius und höchstens ein Tausendstel von diesem ausmachen, so daß für den Reduktionsvorgang die Kenntnis von nicht allzu genauen Höhen ausreicht. Als optimale Approximations- und Referenzfigur wird — stellvertretend für das Erdganze — das Rotationsellipsoid genommen, das zugleich — wenn geozentrisch gelagert — auch physikalisch das Normalfeld der terrestrischen Schwere bestimmt, indem man auf ihm funktional eine Schwereverteilung vorgibt.

Von hier aus können dann — gleichsam in einem zweiten Approximationsschritt — wiederum genauere Höhenwerte bestimmt werden, worauf der Reduktionsvorgang zu wiederholen wäre, usf.

Es spricht für die Vielfalt geodätischer Modellbildungen, wenn bereits bei der Frage, welches denn der einem Geländepunkt zugeordnete Ellipsoidpunkt sei, sogleich mehrere Lösungen dargeboten werden, — je nachdem nämlich, längs welcher Kurve man den Geländepunkt nach unten zu verschieben hat, um auf den zugeordneten Punkt am Ellipsoid zu gelangen.

Rückblickend kann man heute die Internationale Retrig-Kommission dazu beglückwünschen, daß sie sich vor Jahren schon dafür entschieden hat, es bei dem klassischen BRUNS-HELMERT-Vorgang zu belassen, nämlich einfach vom Geländepunkt geometrisch das Lot auf das Ellipsoid zu fällen, also eine Orthogonalprojektion des Geländes auf das Ellipsoid vorzunehmen; — eine Rechenweise, die bereits in den Konzeptionen von C. F. GAUSS enthalten ist.

Wäre man anderen Vorschlägen gefolgt, nämlich die natürliche Lotlinie, (also eine doppelt gekrümmte Raumkurve), hierfür zu benützen, so hätte man sich nicht nur auf weitläufige Lotkrümmungsberechnungen einlassen müssen, sondern es wäre, wegen der mangelnden Kenntnis der Dichtefunktion im Erdinnern, das so definierte Punktsystem, — das „naturtreue" Netz, wie man es damals nannte — mit Unsicherheiten grundsätzlicher Art belastet worden, die einem praktikablen Abschluß der Berechnungsarbeiten sehr hinderlich gewesen wären, — ja, ihn vielleicht sogar bis an die Grenze des Unmöglichen gerückt haben würden.

Die Lotlinie des Normalfeldes der Schwere zu benützen, wäre eine Alternative zur Orthogonalprojektion gewesen. Verschiedentlich — so bei der Bearbeitung von astronomischen Beobachtungen — ist hiervon rechnerisch Gebrauch gemacht worden; doch passen diese Werte nicht zur BRUNS-HELMERT-Projektion, sie müssen vor ihrer Einführung in die Berechnung des Europäischen Dreiecksnetzes wieder entsprechend zurückreduziert werden.

In dieser Abstraktion, das wirkliche Schwerefeld für den vorgenannten Zweck durch ein lineares zu ersetzen, mag physikalisch eine Verzichtleistung, vielleicht sogar eine Verarmung, zum Ausdruck kommen; doch liegt der Gewinn hierbei — wie bei jeder gedanklichen Abstraktion — auf der Seite des Begrifflichen und der klaren Definition, indem sich die Unsicherheiten aus der geophysikalischen Dichtefunktion nicht auf die Koordinaten der Trigonometrischen Punkte auswirken können.

Demzufolge braucht an den Zahlenwerten für die an der Erdoberfläche gemessenen Strecken und Winkeln weder die normale noch die wahre Lotkrümmungskorrektion angebracht zu werden, sondern es verbleibt nur die Reduktion wegen Lotabweichung bzw. Geoidundulation, und dazu noch die Torsionskorrektion wegen Windschiefe der Ellipsoidnormalen und schließlich die Reduktion auf die Geodätische Linie (so bei Winkeln) bzw. auf deren Bogenlänge (so bei Strecken).

b) Die Berechnungen auf dem Ellipsoid

Sinn der Reduktionsmethode ist also die Elimination der dritten Dimension, der Höhe, so daß dann nur noch ein zweidimensionales Problem verbleibt, nämlich die Koordinaten der Projektionspunkte auf dem gewählten Ellipsoid zu bestimmen.

Hier erweist sich nun klar der Vorzug der von GAUSS geschaffenen Flächentheorie, die beim Rechnen auf dem Ellipsoid gerade den geodätischen Bedürfnissen weit entgegenkommt: Die Koordinatenübertragung mit Hilfe der Geodätischen Linie und ihre Umkehrung, also die sogenannten geodätischen Hauptaufgaben, haben mit der GAUSSschen Theorie eine solche Förderung erfahren, daß man glauben möchte, es seien nur die Erfordernisse der geodätischen Praxis gewesen, die GAUSS zur Schaffung der modernen Flächentheorie Anlaß boten; — wüßte man nicht, daß es das innere Bedürfnis des schöpferischen Genius war, das hier der praktisch-technischen Entwicklung weit vorausgeeilt ist, — so weit, daß es dann noch mehrere Jahrzehnte bedurfte, bis ältere geodätische Rechenmethoden, wie beispielsweise die Koordinatenübertragung längs des Vertikalschnittes oder die mit der Chorde bzw. mit der Feldlinie, endgültig außer Kurs gesetzt waren.

So benützen wir beim Europäischen Dreiecksnetz auch heute noch das GAUSSsche ellipsoidische Modell in seiner ursprünglichen Prägung, wobei die für die Ausgleichung benötigten Linearformen auf HELMERT zurückgehen: Es sind dies Differentialrelationen für die Geodätische Linie, in denen neben den Differentialen der geographischen Koordinaten von Anfangs- und Endpunkt auch noch solche für die Bogenlänge und für das Azimut auftreten, von denen der Ellipsoiddimensionen zunächst einmal abgesehen.

c) Dreidimensionale RETRIG-Berechnung?

Neuere Entwicklungen, insbesondere der Satellitengeodäsie, haben nun die Frage aufgeworfen, ob man beim Europäischen Dreiecksnetz nicht besser mit einem dreidimensionalen Modell arbeiten sollte, das auf den Euklidischen Raum mit seinen einfachen geometrischen Relationen Bezug nimmt, so daß man die GAUSSsche Flächentheorie dann gänzlich entbehren könnte.

Nun liegen die Dinge hierbei so: Höhenwinkelmessungen über Dreiecksseiten I. Ordnung — also mit Zielweiten zwischen 40 und 80 km — sind aus den bekannten Gründen (wegen der Refraktionsanomalien) noch kaum vorliegend. Die theoretische Möglichkeit, Höhenbestimmungen mit Hilfe von Schrägstrecken vorzunehmen, scheidet — wegen zu geringer Steilheit der Dreiecksseiten I. Ordnung — von selbst aus; es würden — wollte man es versuchen — sich die Höhen mit einem viel zu großen Unsicherheitsfaktor ergeben.

Bezieht man aber die nivellierten Höhenunterschiede und die Geoidundulationen in die dreidimensionale Lösung mit ein, so zerfällt dann — bei entsprechender Wahl der Koordinaten — das Bestimmungsgleichungssystem in zwei getrennte Teilsysteme (eines für die Lage und eines für die Höhe), so daß damit die Notwendigkeit, die trigonometrische Netzausgleichung im dreidimensionalen Raum durchzuführen, als eindeutig negiert erscheinen muß.

Diese Tatsache steht auch vollkommen im Übereinklang damit, daß wir neben dem Europäischen Dreiecksnetz das Europäische Nivellementsnetz und die Geoidbestimmung von Europa völlig getrennt und unabhängig voneinander bearbeiten.

d) Vergleich und Verschmelzung mit einem geodätischen Satellitennetz

Eine Änderung dieser Situation tritt erst dann ein, wenn das „Retrig" mit einem nach den Methoden der Satellitengeodäsie geschaffenen Netz verglichen oder sogar mit diesen verschmolzen wird.

Wir wollen kurz — aber nur rein modellmäßig — eine solche Möglichkeit betrachten: Von den beiden sich dabei anbietenden Lösungswegen besteht der eine darin, daß man die bei der Berechnung des Retrig vollzogene Elimination der dritten Dimension wieder rückgängig macht, d. h. man ergänzt das Retrig-Koordinatenverzeichnis der ellipsoidischen Breiten und Längen noch durch Beigabe der ellipsoidischen Höhen (als Summe von orthometrischer Höhe plus Geoidundulation) und errechnet nach bekannten Beziehungen dann die dreidimensionalen kartesischen Koordinaten, die dann den aus der Satellitengeodäsie stammenden Werten gegenüberzustellen sind.

Der andere Weg würde darin bestehen, auf der Seite der Satellitentriangulation zum Schluß gleichfalls die Höhen zu eliminieren, so daß deren Ergebnis auch zweidimensional dargeboten wird und man auf dieser Basis dann den Vergleich mit der terrestrischen Triangulation vornimmt. Dieser zweitgenannte Weg würde den Vorteil bieten, daß man (bei einer Fusion beider Netze) die Bestimmung der ellipsoidischen Höhen ganz dem Satellitennetz überläßt, so daß die in den Randgebieten des Retrig sehr unsicheren Geoidundulations- und Höhenwerte dabei gar nicht ins Spiel kämen und man auf sie nicht angewiesen wäre.

Inwieweit bei einer solchen Vergleichs- oder Verschmelzungsberechnung beider Systeme bzw. des Ellipsoides und auch eine Maßstabsänderung mit in Rechnung zu stellen sein wird, ist letztlich eine Frage der Signifikanz bzw. ein Problem der statistischen Hypothesenprüfung.

5. Das stochastische Modell

Hierunter versteht man bekanntlich alle Aussagen über Gewichte und Korrelationen, die a priori den Messungsgrößen zuzuordnen sind, sowie über die Art ihrer kalkülmäßigen Behandlung.

a) Das GAUSSsche Minimumsprinzip

Wiewohl nachweislich schon GAUSS die Eigenschaften von untereinander abhängigen — wir sagen heute: korrelierten — Beobachtungen kannte, bezog er die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate nur auf nichtkorrelierte Beobachtungen. Doch bringt er zugleich den Nachweis, daß diese Methode kleinste Varianzen für alle ausgeglichenen Größen liefert, — eine Entdeckung, die man später MARKOV zugeschrieben hat.

b) Korrelierte Beobachtungen

Es war dann 1837 die BESSELsche Netzausgleichung — also schon vor 140 Jahren —, die eine Ausgleichung von korrelierten bedingten Beobachtungen, ganz nach modernen Auffassungen, darstellt. Die erforderlichen Kovarianzen wurden — als mathematische Korrelation — den vorausgehenden Stationsausgleichungen entnommen. Bemerkenswert, daß nach dieser Methode der korrelierten bedingten Netzausgleichung nicht nur die preußischen Triangulationsnetze vor 1870 sondern auch die Netze in Österreich-Ungarn, das damalige Schweizerische Dreiecksnetz, das Nagelsche Netz im Kgr. Sachsen, das Mecklenburgische Dreiecksnetz (und noch einige andere) berechnet worden sind.

HELMERT zeigte dann 1872, daß man den Vektor der korrelierten Beobachtungen nur mit der Quadratwurzel aus der Inversen zur Varianz-Kovarianzmatrix zu multiplizieren braucht (entsprechend der späteren CHOLESKI-Zerlegung), um ihn in einen Vektor von nichtkorrelierten Beobachtungen zu verwandeln (zu homogenisieren, wie wir heute sagen). Damit hatte HELMERT den Weg erschlossen, sämtliche Ausgleichsformen auf korrelierte Beobachtungen anzuwenden. — Unabhängig davon erschien dann erst 1947 bzw. 1956, also ein Dreivierteljahrhundert später, das Lehrbuch von TIENSTRA über die Ausdehnung der Methode der kleinsten Quadrate auf korrelierte Beobachtungen.

c) Verschwindende Kovarianzen

Beim Europäischen Dreiecksnetz ergab sich nun der Sonderfall, daß zufolge der von SCHREIBER um 1870 eingeführten symmetrischen Beobachtungsmethode, wie sie dann von vielen europäischen Landesvermessungen übernommen wurde, alle Kovarianzen in den Stationsmatrizen zu Null werden, so daß die Ergebnisse der Stationsausgleichungen wie ursprüngliche Beobachtungen in der Netzausgleichung zu behandeln waren. Nur in einigen wenigen der europäischen Teilnetze bestanden noch Korrelationen, so in der Schleswig-Holsteinischen Dreieckskette von 1869 und auf einer Reihe von Hochgebirgsstationen, insbesondere in der Schweiz, die nach der sogenannten Sektorenmethode beobachtet worden waren. Hier war dann das Modell der korrelierten Beobachtungen zu benützen.

d) Gewichtsbestimmungen

Beim Verschwinden der Kovarianzen verbleibt aber immer noch das Problem der — z. T. ganz erheblichen — Unterschiede in den Varianzen a priori, die als

Gewichtsunterschiede bei der Berechnung des „Retrig“ in Rechnung zu stellen sind. Die Homogenisierung über die Quadratwurzeln aus den Gewichten vollzieht sich dann im gleichen Sinne, wie es schon von GAUSS praktiziert worden ist. GAUSS war es auch, der auf algebraisch sehr elegante Weise die Änderungen im Lösungsvektor explizit angegeben hat, die sich als Folge einer willkürlichen Gewichtsänderung ergeben.

Damit sind wir bei einem sehr delikaten Teilproblem des stochastischen Modells angelangt, der Gewichtsbestimmung a priori. Zwar wissen wir — gerade aus GAUSS' expliziter Darstellung, sowie aus Untersuchungen von Prof. LINKWITZ —, daß mäßige Gewichtsänderungen nur geringfügige Änderungen im Ergebnis hervorbringen, so daß die diesbezügliche Stabilität als beträchtlich bezeichnet werden kann; doch ist an keiner Stelle des stochastischen Modells dem persönlichen Ermessen des Rechners ein so breiter Spielraum eingeräumt wie gerade hier. Ich muß es mir versagen, auf die vielerlei Vorschläge und Prinzipien auf diesem Gebiet einzugehen — Maximum-Information-Principle, Homogenisierung von Mischverteilungen usw. —; aber immer kommt es darauf an, vor Beginn der Ausgleichung parameterfreie Linearkombinationen der Beobachtungen zu bilden (die sogenannten Widersprüche), um die Messungsgrößen zu nötigen, uns den Grad ihrer Unsicherheit zu verraten.

Diffiziler wird das Problem, wenn Gewichtsverhältnisse zwischen heterogenen Beobachtungen, wie zwischen Winkeln und Strecken bzw. Laplace-Azimuten abgeschätzt werden sollen. Aber auch hier gilt als oberstes Prinzip, daß man in der Reihe der zu benützenden Informationsquellen nur dann zu konvergenten Gewichtszahlen gelangt, wenn man alle überhaupt erreichbaren Informationen (Widersprüche aus Wiederholungsmessungen, Teilausgleichungen usw.) dabei zu Rate zieht.

e) *Physikalische Zufallsgrößen*

Mit der Betrachtung von heterogenen Größen — wie Winkeln und Strecken — sind wir nun bereits in ein weiteres Problem, in eine weitere Situation eingetreten, bei der die Heterogenität noch weiter gefaßt ist, — indem in die GAUSSsche Minimumsbedingung nicht nur die vorwiegend aus Meßfehlern zu erklärenden Winkel- und Streckenverbesserungen aufgenommen werden, sondern auch physikalische Restgrößen, denen man die Eigenschaft von Zufallsvariablen zuweist.

So wurde vom Verfasser bei der Berechnung des „Europäischen Datums“ ED 1950 neben der Quadratsumme der Lotabweichungen — als physikalische Größen — auch noch die aus Messungsfehlern stammenden Residuen der Laplace-Bedingungen — als reine Zufallsfehler — mit in Rechnung gestellt. Durch Homogenisierung an Hand ihrer Varianzen werden alle diese Größen dimensionslos und können additiv in der GAUSSschen Quadratsumme miteinander vereinigt werden.

f) *Lotabweichungsinterpolation*

Wir sprachen oben davon, daß zum Zweck der Reduktion unserer Meßgrößen auf das Ellipsoid die Lotabweichungen bekannt sein müssen. Bei der BRUNS-

HELMERT-Projektion sind das die Oberflächen-Lotabweichungen, wie man sie unmittelbar aus astronomischen Messungen erhalten kann. Vielfach müssen sie indessen von Nachbarpunkten her interpoliert werden. Das Problem dabei liegt nicht so sehr in der Form der Interpolation, ob beispielsweise graphisch oder nach einem numerischen Prädiktions- oder Kollokationsverfahren, sondern vielmehr in ihrer starken Abhängigkeit von den topographischen Geländeformen. Unterläßt man es, wie neuerlich wieder propagiert, deren Einflüsse durch Attraktionsberechnungen oder auf gravimetrische Weise zu berücksichtigen, so können, wie nachgewiesen, Fehlerwirkungen — bis zu 16″ — entstehen, die also so groß sind, daß das gesamte Verfahren damit in Frage gestellt werden würde.

6. Dualitätseigenschaften

Wenn wir nun, facettenartig, die verschiedenen Aspekte unseres funktionalen und stochastischen Modells beleuchtet haben, so muß man sich jedoch dessen bewußt bleiben, daß mit dieser Einteilungsweise nur ein heuristisches Prinzip benutzt wird: In gewisser Weise nämlich sind die einzelnen Phänomene gegeneinander austauschbar; sie haben „duale“ Eigenschaften. Ein Beispiel:

Will man zwei benachbarte Netze über ihre Verbindungspunkte streng miteinander vereinigen, so braucht man nur die aus den selbständigen Teilnetzen stammenden Koordinaten als korrelierte Beobachtungen mit ihren Kovarianzmatrizen in eine neue Ausgleichung einzuführen. Hierfür benötigt man die für korrelierte Beobachtungen geltende Minimumsbedingung, womit die Struktur des stochastischen Modells angesprochen ist.

Andererseits kann man aber auch so vorgehen, daß man — ohne die Theorie der korrelierten Beobachtungen zu kennen — von Haus aus die beiden Teilnetze als Bestandteil eines Gesamtnetzes konzipiert und beim Zusammenfügen der Teilnetzgleichungen dann das vom Verfasser als „Additionstheorem“ für reduzierte Normalgleichungen bezeichnete Verfahren verwendet. Dies aber ist eine Angelegenheit des funktionalen Modells. Da sich nun zeigen läßt, daß nach beiden Methoden sich dasselbe Resultat ergibt, ist damit die genannte Dualität klar erwiesen.

7. Noch nicht in Anwendung gebrachte Modelle

Vorstehend sind die grundlegenden Modellvorstellungen skizziert, die bei der Schaffung des neuen „Retrig“ Pate gestanden haben. Bevor wir nun zu einem abschließenden Wort gelangen, soll noch kurz dargetan werden, welche der möglichen Modellvorstellungen nicht — oder noch nicht — bei der Retrig-Berechnung Verwendung gefunden haben:

a) Astronomische Längen als Zufallsvariable

Da sind als erstes die astronomischen Längen, deren Fehler über die Laplace-Azimute erhebliche Verdrehungen und Stauchungen des trigonometrischen Netzes hervorrufen können. Sie müßten daher — anders als seither — als gesonderte stochastische Grundgesamtheit behandelt werden; sei es, daß man das Längennetz über das genannte „Additionstheorem" mit dem trigonometrischen Netz verbindet, oder daß man die zugehörigen Laplace-Azimute mit entsprechenden Korrelationsmatrizen versieht (Dualitätsprinzip). Die künftige Programmgestaltung für das „Retrig" wird dem Rechnung zu tragen haben.

b) Die Frage der Seitenrefraktion

Zum anderen ist es das Problem der Seitenrefraktion: Ihren großregionalen Anteil durch die zwei Parameterwerte eines horizontalen Vektors darzustellen, dürfte nach früheren Erfahrungen die Gefahr in sich bergen, daß die Netzgestalt im Großen verfälscht werden könnte. Und kleinregionale Individualkorrektionen wegen Seitenrefraktion z. B. aus dem nächtlichen Vertikalgradienten der Temperatur bei Kenntnis der lichten Höhe des Zielstrahles über einem Sichthindernis zu berechnen, erfordert viel zu spezielle Voraussetzungen, die im „Retrig" zumeist nicht gegeben sind. So verbleibt bestenfalls nur eine a posteriori-Untersuchung der Residuensysteme auf signifikante Modellanteile.

c) Maßstab der Ellipsoid-Dimensionen

Dagegen wird die — seither noch nicht vorgenommene — Abstimmung des Netzmaßstabes auf den Globalmaßstab der Ellipsoiddimensionen sich ohne Schwierigkeiten durchführen lassen, da es sich hierbei nur um einen einzigen Parameter handelt, der sich deutlich genug in den geographischen Koordinaten ausdrückt.

d) Das RETRIG als „freies" Netz?

Schließlich sei noch eine Bemerkung nicht unterdrückt, die sich auf die Möglichkeit bezieht, das „Retrig" als sogenanntes „freies Netz" zu berechnen: Wie man weiß, wird dabei die Netzausgleichung simultan mit der Netzorientierung und -lagerung vorgenommen, und zwar so, daß der Lösungsvektor minimal ist, d. h. daß die Quadratsumme der Koordinatenklaffungen gegenüber den Näherungspunkten ein Minimum wird. Denkt man an die Herkunft der Näherungskoordinaten aus dem älteren System von 1950, so erkennt man, daß damit nicht viel erreicht ist. Im Gegenteil: Die definitive Lagerung und Orientierung des „Retrig" sollte durch den Anschluß an ein Weltsatellitennetz herbeigeführt werden, — nicht aber durch Anfelderung an die alten Koordinaten von 1950, was gleichsam einen Schritt zurück bedeuten würde, zumal die zum Minimalsystem gehörenden Fehlerellipsen — wenn sie interessieren sollten — auch von jeder anderen, d. h. festen Orientierung des Netzes aus errechnet werden können, wie von Prof. MEISSL gezeigt.

Noch sehr viel abwegiger wäre es, wenn mit dem Beginn der Arbeiten am Europäischen Dreiecksnetz so lange gewartet wird, bis für alle trigonometrischen Punkte Näherungskoordinaten aus Satellitenmessungen vorliegen, — lediglich um das Prinzip des freien Netzes in Anwendung zu bringen. Es hieße das, nur um ein äußerliches Bedürfnis zu befriedigen, z. B. nach Anwendung einer nicht adäquaten Kalkülmethode, den Beginn der Arbeiten in unabsehbare Fernen zu verschieben.

Zuerst die Ausgleichung, dann die Lagerung des Netzes, das ist die von der Sache her gegebene Reihenfolge, wie sie in der Landesvermessung seit den Zeiten von C. F. GAUSS praktiziert wird. Die Verquickung beider Vorgänge wäre — jedenfalls beim Europäischen Dreiecksnetz — eine überflüssige Maßnahme.

e) Kalkülfragen

Wie sich im Bereich der Theorie das funktionale und das stochastische Modell als polare — in gewissen Bezirken sogar als duale — Aspekte unseres Problemkreises erweisen, so zeichnet sich auch in der gesamten kalkülmäßigen Durchführung eine ähnliche Gliederung ab: Auf der funktionalen Seite sind es Fragen der Auflösung großer linearer Gleichungssysteme, die in vorteilhafter Weise vom Computer her, in weniger vorteilhafter Weise dagegen von den bestehenden nationalen Teilnetzgrenzen beeinflußt werden. Auf der Seite des stochastischen Modells gewähren die Verfahren der modernen Statistik mit der mehrdimensionalen und multivariaten Hypothesenprüfung ein wertvolles Hilfsmittel, um die zu treffenden Entscheidungen zu erleichtern.

Daß die Berechnung des „Retrig" in drei Phasen durchgeführt wird, wobei die erste nur die Winkel und die maßstabsfreien Strecken, die zweite zusätzlich die Laplace-Azimute und die maßstabsbestimmenden Strecken, und schließlich die dritte alle künftig zu planenden Verfeinerungen enthält, wie beispielsweise den Übergang auf ein definitives und definitiv gelagertes Ellipsoid, kommt gerade der Anwendung statistischer Prüfmethoden besonders entgegen.

8. Ideelle Wertung

Versucht man eine Gesamtwertung aller Bemühungen um das Europäische Dreiecksnetz zu erlangen, so zeigt sich ein ganz merkwürdiges Bild:

Es sind gar nicht so sehr die numerischen Ergebnisse, die Zahlenwerte für die Koordinaten, für Maßstabsverhältnisse und Orientierungsgrößen, die den ideellen Wert des Vorhabens ausmachen; — sondern ebenso bedeutungsvoll ist die Entwicklung gedanklicher Modellvorstellungen und ihre folgerichtige Durchbildung, welche den wissenschaftlichen Charakter eines solchen übernationalen Werkes zum Ausdruck bringen, das — wie wir sahen — in seinen ersten Anfängen auf eine Idee des großen und begnadeten Genius Carl Friedrich GAUSS zurückführt.

Und vielleicht liegt darin auch das tiefere Geheimnis um GAUSS' jahrelanger praktisch-geodätischer Betätigung, die — nach einer Darstellung von Prof. GERKE — bis in seine frühen Braunschweiger Jahre zurückreicht: Daß es zuvörderst die Idee und die Vorstellung von dem zu vollendenden Werke sind, die ihm Ansporn und Imperativ zu all den detaillierten geodätischen Operationen waren; — wie letztlich alles Bemühen um wissenschaftliche Erkenntnis vom Prinzip des Ethischen getragen wird und getragen sein muß.